PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TRỰC GIAO CHO PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN TẢI KHUẾCH TÁN

Nguyễn Hữu Thọ

Bộ môn Toán học – Khoa Công nghệ Thông tin, Trường Đại học Thủy lợi

Email: nhtho@wru.edu.vn

1. MỤC TIÊU NGHIÊN CỨU

Trong bài báo này tôi sẽ trình bày một phương pháp xấp xỉ thông qua kỹ thuật phân tích trực giao để giải bài toán điều khiển tối ưu đối với phương trình truyền tải khuếch tán.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Dựa vào phân tích trực giao để xét mối quan hệ giữa nghiệm và một xấp xỉ quy hoạch động đối với phương trình Hamilton-Jacobi.

3. KẾT QUẢ

a) Phương pháp phân tích trực giao cho phương trình đạo hàm riêng tiến hóa.

Xét ma trận $Y \in ¡^{m\times n}$ với $\text{rank}d \le \min\{m,n\}$. Gọi y_j là cột thứ j của ma trận Y. Ta sẽ tìm cơ sở trực chuẩn $\{\psi_i\}\Big|_{i=1}^{1}$ với $1 \le n$ sao cho cực tiểu của phiếm hàm sau là tồn tại

$$J(\psi_1,...,\psi_1) = \sum_{j=1}^{n}\left\| y_j - \sum_{i=1}^{1}\langle y_j,\psi_i\rangle\psi_i \right\|^2 \qquad (1)$$

Nghiệm của bài toán cực tiểu hóa này được xác định như trong định lý sau.

Định lý 1. [2] Cho $Y=[y_1,...,y_n]\in ¡^{m\times n}$ là một ma trận với $\text{rank}d \le \min\{m,n\}$. Hơn nữa, gọi $Y=\Psi\Sigma V^T$ là phân hoạch giá trị kỳ dị của Y, với $\Psi=[\psi_1,...,\psi_m]\in ¡^{m\times n}$, $V=[v_1,...,v_n]\in ¡^{n\times n}$ là các ma trận trực giao và $\Sigma \in ¡^{m\times n}$ là ma trận đường chéo, $\Sigma = diag\{\sigma_1,...,\sigma_m\}$. Khi đó, với mỗi $1\in\{1,...,d\}$, nghiệm của bài toán (1) được xác định bởi các véc tơ kỳ dị trái $\{\psi\}\Big|_{i=1}^{1}$, tức là 1 cột ban đầu của Ψ.

Chúng ta gọi các véc tơ $\{\psi\}\Big|_{i=1}^{1}$ là cơ sở phân tích trực giao với hạng là 1. Khi tìm được cơ sở phân tích trực giao với hạng là 1 chúng ta sẽ nhận được một bài toán với số chiều nhỏ hơn nhiều so với ban đầu vì thực tế 1 có thể chọn rất bé.

Xét hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} y\&(s) = Ay(s) + f(s,y(s)), \quad s\in(0,T] \\ y(0)=y_0 \end{cases} \qquad (2)$$

với $y_0 \in ¡^m, A\in ¡^{m\times n}$ và $f:[0,T]\times ¡^m \to ¡^m$ là hàm liên tục và Lipschitz địa phương. Trước hết ta xây dựng một phân hoạch thời gian $0\le t_1 \le ... \le t_N = T$ và giả sử ta đã biết nghiệm của (2) tại thời điểm $t_j, j=1,...,N$, và gọi đó là *ảnh* của nghiệm tại các thời điểm cố định đó. Khi ta có dãy *ảnh*, theo Định lý 1 ta có thể tính toán cơ sở phân tích trực giao $\{\psi_j\}\Big|_{j=1}^{1}$. Giả sử tìm được nghiệm dưới dạng

$$y^1(s) = \sum_{j=1}^{1} y_j^1(s)\psi_j = \sum_{j=1}^{1}\langle y^1(s),\psi_j\rangle\psi_j,\ s\in[0,T]$$

Thay vào (2) ta được hệ động lực rút gọn

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{1} y\&_j^1(s)\psi_j = \sum_{j=1}^{1} y_j^1(s)A\psi_j + f(s,y^1(s)), s\in(0,T] \\ \sum_{j=1}^{1} y_j^1(0)\psi_j = y_0. \end{cases} \qquad (3)$$

trong (3) chỉ chứa 1 các hàm hệ số $y_j^1(s), j=1,...,1, 1\le m$ nên bài toán này có số chiều thấp hơn bài toán ban đầu và ta có thể viết gọn dưới dạng $\begin{cases} y\&(s) = A^1 y^1(s) + F(s,y^1(s)) \\ y^1(0) = y_0^1 \end{cases}$

trong đó $A^1 \in ¡^{1\times 1}$ với $(A^1)_{ij} = \langle A\psi_i,\psi_j\rangle$,

$$y^1 = \begin{pmatrix} y_1^1 \\ \text{M} \\ y_1^1 \end{pmatrix} : [0,T] \to ¡^1$$

$$F = \left(F_1, ..., F_\ell\right)^T : \left[0, T\right] \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^\ell,$$

$$F_i(s, y) = \left\langle f\left(s, \sum_{j=1}^{\ell} y_j \psi_j\right), \psi_i \right\rangle$$

với $s \in \left[0, T\right], y = \left(y_1, ..., y_\ell\right) \in \mathbb{R}^\ell$, biểu diễn của y_0 trong $\mathbb{R}^\ell$: $y_0^\ell = \left(\left\langle y_0, \psi_1 \right\rangle; ... \left\langle y_0, \psi_\ell \right\rangle\right)^T \in \mathbb{R}^\ell$.

Ta sẽ tìm giá trị thấp nhất có thể của ℓ mà vẫn giữ được tất cả những tính chất của hệ động lực ban đầu. Một lựa chọn tốt cho chỉ số này là:

$$\varepsilon(\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \sigma_i \Big/ \sum_{i=1}^{d} \sigma_i \qquad (4)$$

ở đây σ_i là các giá trị kỳ dị đạt được bởi phân hoạch giá trị kỳ dị. Chỉ số $\varepsilon(\ell)$ càng gần 1 thì xấp xỉ đạt được sẽ càng tốt. Điều này có liên quan chặt chẽ tới sai số chặt cụt sinh ra từ phép chiếu y_j trên không gian được tạo bởi cơ sở trực chuẩn $\left\{\psi\right\}_{i=1}^{\ell}$, cụ thể

$$J\left(\psi_1, ..., \psi_\ell\right) = \sum_{j=1}^{n} \left\| y_j - \sum_{i=1}^{\ell} \left\langle y_j, \psi_i \right\rangle \psi_i \right\|^2 = \sum_{i=\ell+1}^{d} \sigma_i^2.$$

b) Bài toán điều khiển tối ưu

Chúng ta sẽ xét cách tiếp cận này đối với bài toán điều khiển hữu hạn

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = f(y(s), u(s), s), & s \in \left(t, T\right] \\ y(t) = x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \qquad (5)$$

với $y : \left[t, T\right] \to \mathbb{R}^n$ là ẩn hàm, $u : \left[t, T\right] \to \mathbb{R}^m$ là điều khiển, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, s \in \left(t, T\right]$,ký hiệu

$$C = \left\{u : \left[0, T\right] \to U\right\}$$

là tập điều khiển chấp nhận được với $U \in \mathbb{R}^m$ và là tập compact. Giả sử rằng, tồn tại duy nhất một quỹ đạo nghiệm của (3) với điều kiện các điều khiển là đo được (xem [1]). Đối với bài toán điều khiển tối ưu hữu hạn, hàm giá sẽ được xác định bởi

$$\min_{u \in C} J_{x,t}(u) := \int_t^T L(y(s, u), u(s), s) e^{-\lambda s} ds + g(y(T)) \qquad (6)$$

trong đó $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ là chi phí vận hành và $\lambda \geq 0$ là thành phần chiết khấu. Mục đích là tìm một quy luật điều khiển trạng thái ngược $u(t) = \Phi(y(t), t)$ theo các hàm trạng thái $y(t)$, ở đây Φ là ánh xạ phản xạ. Trước hết đặt

$$v(x, t) := \inf_{u \in C} J_{x,t}(u). \qquad (7)$$

Khi đó ta có:

Mệnh đề 1. *Với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ và $0 \leq \tau \leq t$ ta luôn có:*

$$v(x, t) = \min_{u \in C} \left\{ \int_t^T L(y(s), u(s), s) e^{-\lambda s} ds + v(y, t - \tau) \right\}. \quad (8)$$

Từ (7) ta suy ra v thỏa mãn phương trình Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB):

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(y, t) = \min_{u \in C} \left\{ L(y, u, t) + \nabla v(y, t) \cdot f(y, u, t) \right\}. \quad (9)$$

Đây là phương trình ĐHR phi tuyến cấp một và ta thường giải số bằng phương pháp phần tử hữu hạn hoặc kỹ thuật tựa Lagrange (xem [3]). Trước hết chúng ta rời rạc hóa (HJB) bằng cách rời rạc bài toán điều khiển và sau đó chiếu sơ đồ nửa rời rạc trên một lưới và nhận được

$$\begin{cases} v_i^{n+1} = \min_{u \in C} \left[\Delta t L(x_i, n\Delta t, u) + I\left[v^n\right](x_i + \Delta t F(x_i, t_n, u)) \right] \\ v_i^0 = g(x_i), \end{cases}$$

với $x_i = i\Delta x, t_n = n\Delta t, v_i^n := v(x_i, t_n)$ và $I[.]$ là toán tử nội suy được sử dụng để tính giá trị của v^n tại điểm $x_i + \Delta t F(x_i, t_n, u)$ (nhìn chung điểm này không phải là nút lưới) (xem [4]). Để nhận được giá trị của v_i^{n+1} chúng ta cần cần giải bài toán cực tiểu. Xét bài toán

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds} \left\langle y(s), \varphi \right\rangle_H + a(y(s), \varphi) = \left\langle B(u(s), \varphi \right\rangle_{V', V} \ \forall \varphi \in V \\ y(t) = y_0 \in H, \end{cases} \qquad (10)$$

ở đây $B : U \to V'$ là toán tử tuyến tính liên tục. Giả thiết với mỗi $u \in C_{ad}$ và $y_0 \in H$ sẽ tồn tại duy nhất nghiệm y của (10); V và H là hai không gian Hilbert, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ là song tuyến tính đối xứng. Khi đó phiếm hàm giá của bài toán là

$$\Im_{y_0, t}(u) := \int_t^T L(y(s), u(s), s) e^{-\lambda s} ds + g(y(T)),$$

trong đó $L : V \times U \times [0, T] \to \mathbb{R}$. Bài toán điều khiển tối ưu bây giờ là: $\min_{u \in C_{ad}} \Im_{y_0, t}(u)$ (11)

với ràng buộc: $y \in W_{loc}(0, T; V) \times C$ thỏa mãn (11), ở đây $W_{loc}(0, T) = \bigcap_{T > 0} W(0, T)$ và $W(0, T)$ là không gian Sobolev:

$$W(0, T) = \left\{ \varphi \in L^2(0, T; V), \varphi_t \in L^2(0, T; V') \right\}.$$

Để tính nghiệm phân tích trực giao đối với (11), ta xét: $y^\ell(x, s) = \sum_{i=1}^{\ell} \omega_i(s) \psi_i(x),$ (12)

ở đây $\{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}$ là cơ sở phân tích trực giao được xác định như ở trên. Xét các ma trận

$$M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell} \text{ với } m_{ij} = \langle \psi_j, \psi_i \rangle_H,$$

$$S = ((s_{ij})) \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell} \text{ với } s_{ij} = a\langle \psi_j, \psi_i \rangle,$$

và ánh xạ điều khiển $b : U \to \mathbb{R}^{\ell}$ được xác định bởi:

$$u \to b(u) = (b(u)_i) \in \mathbb{R}^{\ell} \text{ với } b(u)_i = \langle Bu, \psi_i \rangle_H.$$

Các hệ số của điều kiện ban đầu $y^{\ell}(0) \in \mathbb{R}^{\ell}$ được cho bởi $\omega_i(0) = (\omega_0)_i = \langle y_0, \psi \rangle_X$, $1 \le i \le \ell$, và nghiệm của bài toán hệ động lực rút gọn ký hiệu là $\omega^{\ell}(s) \in \mathbb{R}^{\ell}$. Khi đó xấp xỉ Galerkin xác định bởi

$$\min J^{\ell}_{\omega_0^{\ell},t}(u) \qquad (13)$$

với $u \in C_{ad}$ và ω là nghiệm của bài toán sau:

$$\begin{cases} \dot{\omega}^{\ell}(s) = F(\omega^{\ell}(s), u(s), s), \; s > 0, \\ \omega^{\ell}(0) = \omega_0^{\ell}. \end{cases} \qquad (14)$$

Phiếm hàm giá cho bởi

$$J^{\ell}_{\omega_0^{\ell},t}(u) = \int_0^T L(\omega^{\ell}(s), u(s), s) e^{-\lambda s} ds + g(\omega^{\ell}(T)),$$

ở đây ω^{ℓ} và y^{ℓ} xác định như trong (12), ánh xạ phi tuyến $F : \mathbb{R}^{\ell} \times U \to \mathbb{R}^{\ell}$ xác định bởi

$$F(\omega^{\ell}, u, s) = M^{-1}(-S\omega^{\ell}(s) + b(u(s))).$$

Với trạng thái ban đầu $\omega_0 \in \mathbb{R}^{\ell}$ ta có hàm giá trị $v^{\ell}(\omega_0^{\ell}, t) = \inf_{u \in C_{ad}} J^{\ell}_{\omega_0^{\ell},t}(u)$, trong khi ω^{ℓ} là nghiệm của (14) với điều khiển u và điều kiện ban đầu ω_0. Các phương trình HJB được xác định trong $\mathbb{R}^n$ nhưng chúng ta cần hạn chế miền tính toán γ_h chỉ là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$. Điều này được đảm bảo vì $y + \Delta t F(y,u) \in \gamma_h$ với mỗi $y \in \gamma_h$ và $u \in C_{ad}$. Ta có thể chọn

$$\gamma_h = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_{\ell}, b_{\ell}]$$

với $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_{\ell}$. Các đoạn $[a_i, b_i]$ sẽ được chọn sao cho hệ động lực chứa tất cả các thành phần của quỹ đạo điều khiển. Giả sử rằng đã rời rạc không gian điều khiển $U = \{u_1, ..., u_M\}$, với U đối xứng. Khi đó

$$y^{\ell}(s) = \sum_{i=1}^{\ell} \langle y(s), \psi_i \rangle \psi_i = \sum_{i=1}^{\ell} \omega_i(s)\psi_i$$

với các hệ số $\omega_i(s) \in [a_i, b_i]$. Xét quỹ đạo nghiệm $y(s, u_j)$ sao cho điều khiển là hằng số $u(s) \equiv u_j$ với mỗi t_j, $j = 1, ..., M$. Khi đó ta có

$$y^{\ell}(s, u_j) = \sum_{i=1}^{\ell} \langle y(s, u_j), \psi_i \rangle \psi_i.$$

Các hệ số $\omega_i^{(j)}(s)$ sẽ thuộc các khoảng dạng $[\underline{w}_i^{(j)}, \overline{w}_i^{(j)}]$, trong đó với $i = 1, ..., \ell$ ta sẽ chọn a_i, b_i như sau:

$$a_i \equiv \min\left\{\underline{w}_i^{(1)}, ..., \underline{w}_i^{(M)}\right\}, \; b_i \equiv \min\left\{\overline{w}_i^{(1)}, ..., \overline{w}_i^{(M)}\right\}.$$

c) Xấp xỉ phân tích trực giao

Chọn tham số $\varepsilon(\ell)$ để kiểm tra tính đúng đắn của xấp xỉ phân tích trực giao và định nghĩa một ngưỡng. Trước hết bằng cách tính toán phân tích giá trị kỳ dị của ma trận Y sẽ cho ta thông tin về hệ động lực trên toàn bộ thời gian. Kiểm tra tính đúng đắn tại các thời điểm t_i, $i = 1, ..., N$, nếu tại t_k chỉ số vượt quá mức độ cho phép ta sẽ đặt $T_1 = t_k$ và chia khoảng đã cho thành 2 phần $[0, T_1)$ và $(T_1, T]$. Bây giờ xét các ảnh liên quan tới nghiệm tùy thuộc vào thời điểm T_1. Sau đó lặp lại ý tưởng này cho đến khi chỉ số nằm dưới giá trị ngưỡng. Lúc này khoảng thứ nhất đã tìm được, và chúng ta lại khởi động lại quá trình trong khoảng $[T_1, T]$ và sẽ dừng khi đạt tới thời điểm cuối T.

4. KẾT LUẬN

Với kỹ thuật phân tích trực giao thích hợp, ta đạt được các xấp xỉ với độ chính xác cao mà chỉ cần một số lượng nhỏ các hàm cở sở trong phân tích trực giao.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta,1997, Optimal control and viscosity solutions of HJB equations. Birkhauser, Basel.

[2]. K. Kunisch, S. Volkwein, L. Xie, 2004, HJB-POD Based Feedback Design for the Optimal Control of Evolution Problems. SIAM J. on Applied Dynamical Systems, 4, pp.701-722.

[3]. K. Kunisch, L. Xie, 2005, POD-Based Feedback Control of Burgers Equation by Solving the Evolutionary HJB Equation, Computers and Mathematics with Applications. No. 49 , pp.1113-1126.

[4]. F. Troltzsch, 2010, Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and applications, AMS.